

两轮驱动移动机器人的运动学研究^{*}

许松清,吴海彬,杨兴裕

(福州大学机械工程及自动化学院, 福建 福州 350002)

摘 要:给出了自行设计的(2,0)型轮式移动机器人的机械结构,建立了机器人小车的运动学数学模型。在此基础上,详细分析了移动机器人小车的基本运动形式,即直线运动、圆弧运动的实现方式,深入探讨小车圆弧运动的最小半径问题。针对机器人小车机械结构的齿轮传动,讨论对小车运动精度的影响,并提出提高小车运动精度的措施。

关键词:移动机器人;运动学模型;机械结构;齿轮传动

中图分类号: TP24 **文献标识码:** B **文章编号:** 1008 - 5300(2005)06 - 0031 - 04

A Study on Kinematics of Two Driving Wheel Robot

XU Song-qing, WU Hai-bin, YANG Xing-yu

(College of Mechanical Engineering and Automation, Fuzhou University, Fuzhou 350002, China)

Abstract: In this paper, the mechanical structure of (2,0) type wheeled mobile robot designed by our university is introduced, and the mathematical model of robot kinematics is established. Based on it, the basic motion modes of mobile robot such as line motion and arc motion and implementation methods are analyzed in detail. The problem of the robot's minimum motion radius in arc motion mode is deeply discussed. The influence on motion precision by the gear-driven robot is discussed also, and measures to be taken are suggested to improve the motion precision of the robot.

Key words: mobile robot; kinematic model; mechanical structure; gear-driven

0 引 言

轮式移动机器人(Wheeled Mobile Robots)由于具有较强的活动能力,良好的稳定性等特点,在工业、农业、国防等各个领域得到了广泛的应用。国内外许多专家学者对轮式移动机器人进行了系统深入的研究,文献[1]对轮式移动机器人(WMR)建模给出了一个统一的叙述,根据移动机器人的灵活度和可控度将其划分为五大类,建立相应的运动学和动力学模型。文献[2]和文献[4]针对全方位移动机器人进行了详细的分析,得出全方位移动机器人的实现方式及运动学模型等。文献[3]和文献[5]提出了移动机器人实用的一些路径规划方法。在上述理论研究的基础上,基于自行设计的(2,0)型轮式移动机器人模型,分析机械结构组成,根据刚体运动学原理和机器人运动学原理分析并建立机器人小车的运动学方程。并联系实际讨论了轮式移动机器人几种基本运动形式的实现方

式,分析了齿轮传动对运动精度的影响,提出提高小车运动精度应当采取的措施。

1 机器人的机械结构

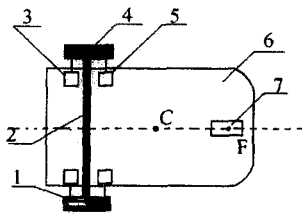
(2,0)型机器人由偏心可定向轮和固定式轮组成。典型的三轮式(2,0)型机器人由两个同一回转中心的固定式轮和一个偏心可定向轮组成。如图1所示为三轮式机器人小车框架结构。

机器人小车的驱动系统由两个直流电机通过齿轮传动分别驱动两固定轮来实现,因此其运动形式为差动方式,即通过左右轮的不同转速来实现小车的不同运动方式。轮7是偏心可定向轮,也称为万向轮,作为小车运动的随动轮。C点为小车的质心,F点为万向轮相对于小车本体的不动点。光电编码器用于小车定位时输出反馈控制信号,不影响小车的运动学模型。

机器人小车实体,如图2所示。

^{*} 收稿日期:2005 - 06 - 10

基金项目:福建省青年科技人才创新基金资助项目(2002J016)



1. 小齿轮(外齿轮); 2. 轴; 3. 光电编码器;
4. 固定式驱动轮(内齿轮); 5. 直流电机;
6. 车架; 7. 偏心可定向轮(万向轮)

图 1 机器人机械结构

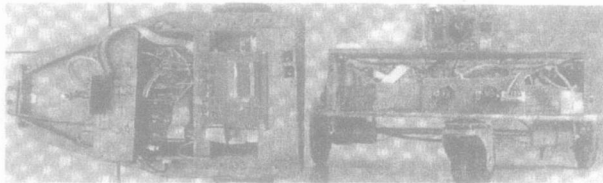


图 2 机器人实体

2 运动学模型

假设所研究的移动机器人是由刚性框架和刚性轮所组成,并假定机器人在水平面上运行,轮子与地面的相对运动满足纯滚动条件。机器人在平面上的位置描述如图 3 所示。

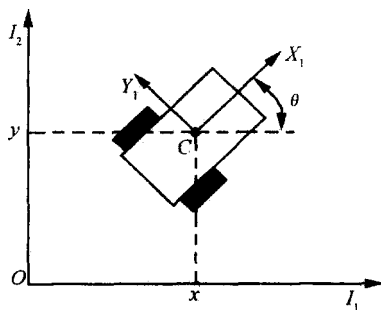


图 3 位姿描述

定义 X_1 方向为小车的正前方,则 θ 为机器人的方向角,小车质心 C 点的坐标为 (x, y) 。因此用一三维向量 $\xi = (x, y, \theta)^T$ 即可完全描述机器人的位姿。

图 4 是传统固定式轮的结构简图,轮子的中心点 B 是机器人框架上的一点。 B 点在随动坐标系 $\{\bar{X}_1, \bar{X}_2\}$ 中的位置用极坐标表示为长度 $CB = l$ 和角 α 。轮子平面相对于 CB 的方向由常数角 β 表示。轮子绕其水平轴转角记为 $\varphi(t)$,轮子半径设为 r 。

由此轮子状态由四个常量 α, β, l, r 给出,运动状态由时变角 $\varphi(t)$ 确定。根据刚体运动学原理有: $\vec{V}_B = \vec{V}_C + \omega_{BC} \times \vec{BC}$,轮子满足纯滚条件,所以将 $\vec{V}_B$ 分解成沿轮子平面和垂直于轮子平面两个分量,所以有下式成立:

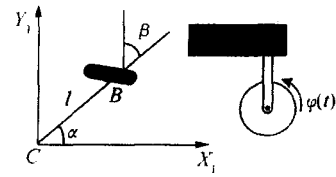


图 4 固定式轮

$$\dot{\varphi} = (\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta)\sin(\alpha + \beta) - (\dot{y}\cos\theta - \dot{x}\sin\theta)\cos(\alpha + \beta) - \dot{\theta}\cos\beta \quad (1)$$

$$0 = (\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta)\cos(\alpha + \beta) + (-\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta)\sin(\alpha + \beta) + \dot{\theta}\sin\beta \quad (2)$$

定义由惯性坐标系 $I_1O I_2$ 到坐标系 X_1CY_1 的旋转变换矩阵,即:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则公式 (1) 和 (2) 可改写为如下矩阵表示形式^[1]:

沿轮子平面:

$$[-\sin(\alpha + \beta) \quad \cos(\alpha + \beta) \quad l\cos\beta]R(\theta)\xi + \dot{\varphi} = 0 \quad (3)$$

垂直于轮子平面:

$$[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l\sin\beta]R(\theta)\xi = 0 \quad (4)$$

式 (3) 和 (4) 即为小车运动过程中驱动轮的约束条件。

有了小车轮子的约束条件,下面针对实际的机器人平台建立小车的运动学模型。假设机器人左右驱动电机的转角为 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$,轮子半径均为 r ,齿轮传动的传动比均为 $i (i < 1)$,则左右驱动轮转角为 $i \cdot \varphi_1(t)$ 和 $i \cdot \varphi_2(t)$,分别用 φ_1 和 φ_2 表示(下文如无特殊说明 φ_1 和 φ_2 均为此意义)。机器人速度分解如图 5 所示,其中 θ 以逆时针方向为正向, V_1 为质心 C 速度的 X_1 方向分量, V_2 为 Y_1 方向分量, V_3 为绕 C 转动的速度。

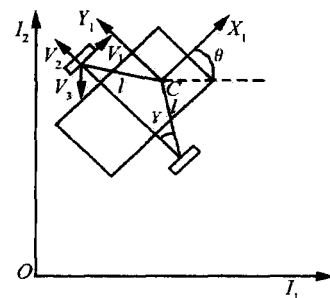


图 5 非完整 (2,0) 型移动机器人

于是有: $V_1 = \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta$

$$V_2 = -\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta$$

$$V_3 = \dot{\theta}$$

因此约束方程变为如下形式:

沿轮子平面有:

$$\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta - \dot{\theta} \cos \gamma = i \dot{\varphi}_1 \quad (5)$$

垂直于轮子平面:

$$\dot{\theta} \sin \gamma = \dot{y} \cos \theta - \dot{x} \sin \theta \quad (6)$$

同理分析右轮可得:

$$\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta + \dot{\theta} \cos \gamma = i \dot{\varphi}_2 \quad (7)$$

联立 (5)、(6)、(7) 式, 分别选取 $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$ 为状态分量, 可得机器人小车的运动学模型:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{ir}{2} J_1(\theta, l) \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

其中,

$$J_1(\theta, l) = \begin{pmatrix} \frac{\cos(\theta - \gamma)}{\cos \gamma} & \frac{\cos(\theta + \gamma)}{\cos \gamma} \\ \frac{\sin(\theta - \gamma)}{\cos \gamma} & \frac{\sin(\theta + \gamma)}{\cos \gamma} \\ -\frac{1}{l \cos \gamma} & \frac{1}{l \cos \gamma} \end{pmatrix}$$

由公式 (5) 和 (7), 选取 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}$ 为状态分量, 可得 $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$ 显式表达:

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = (ir)^{-1} J_2(\theta, l) \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (9)$$

其中,

$$J_2(\theta, l) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & -l \cos \gamma \\ \cos \theta & \sin \theta & l \cos \gamma \end{pmatrix}$$

由公式 (8) 和 (9) 可以得出以下结论:

(a) 如果 $\theta \neq 0$, 则运动约束方程不可能积分为有限形式^[4], 所以机器人为非完整约束系统;

(b) 由非完整约束系统特性可知, 给定小车任何运动状态, 以 $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$ 为控制变量, 不一定可以完全得到该运动状态;

(c) 反过来给定机器人小车左右轮的角速度 $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$, 则可完全确定小车的运动状态。

3 几种基本运动方式的实现

3.1 直线运动

机器人小车的直线运动, 即要求在运动过程中, 小

车的方向角 $\theta = C$ (常数), 所以 $\dot{\theta} = 0$ 。反映在运动学模型上有:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{ir}{2} J_1(\theta, l) \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

式 (10) 要求 $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2$, 也就是说, 机器人在左右轮的转角速度大小和方向都相同的情况下, 小车实现直线运动。

3.2 圆弧运动

小车圆弧运动的情况如图 6 所示, 小车的回转半径记为 R , 则回转中心 O 为小车的速度瞬心。

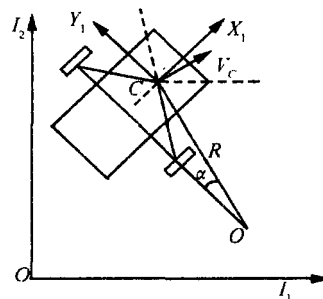


图 6 圆弧运动

由刚体运动学知识容易得出小车的瞬时运动状态:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_c \cos(\theta - \alpha) \\ V_c \sin(\theta - \alpha) \\ -\frac{V_c}{R} \end{pmatrix} \quad (11)$$

式 (11) 和小车的运动学模型 (8) 相一致, 即有:

$$\begin{pmatrix} V_c \cos(\theta + \alpha) \\ V_c \sin(\theta + \alpha) \\ -\frac{V_c}{R} \end{pmatrix} = \frac{ir}{2} J_1(\theta, l) \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

其中 $J_1(\theta, l)$ 的含义与上面相同。由几何关系和约束方程 (12) 可得:

$$R = \frac{l \sin \gamma}{\sin \alpha} \quad (13)$$

$$\frac{\dot{\varphi}_1}{\dot{\varphi}_2} = \frac{R \cos(\theta + \alpha) + l \cos(\theta + \gamma)}{R \cos(\theta + \alpha) - l \cos(\theta - \gamma)} \quad (14)$$

因此, 当两轮的转角速度满足式 (13) 和 (14) 的条件时, 机器人小车质心实现圆弧运动。

3.3 本体质心不变条件下的运动

所谓机器人本体质心不变的运动, 其实质就是小车以本体的质心为速度瞬心的旋转运动, 即有 $R = 0$ 。根据上面的圆弧运动分析可知, 绕质心旋转运动的半

径 R 应满足 (13) 式的条件, 所以 $R_{\min} = \frac{l \sin \gamma}{[\sin \alpha]_{\max}} = l \sin \gamma$, $\alpha \in (0, \pi)$, 显然 $R_{\min}$ 与 γ 有关, $\gamma \neq 0$, 则 $R_{\min} > 0$ 。欲使 $R_{\min} = 0$, 可以通过调整小车上的质量分布, 使小车的质心移到两驱动轮回转轴线的中心点上, 此时机器人小车的运动学模型有如下简洁形式:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{ir}{2} J_3(\theta, l) \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

其中,

$$J_3(\theta, l) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos \theta \\ \sin \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{pmatrix}$$

所以, 小车质心不动的条件, 即 $\dot{x} = \dot{y} = 0$, $\theta \neq 0$, 有:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{ir}{2} J_3(\theta, l) \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} \quad (16)$$

式 (16) 要求 $\dot{\varphi}_1 = -\dot{\varphi}_2$, 也就是说在机器人质心为驱动轮回转轴线的中心点, 左右轮的转角速度相等, 方向相反的情况下, 机器人小车作本体质心不动的运动 (原地打转运动)。

4 齿轮传动对运动学模型的影响

由于轮式移动机器人小车驱动电机和轮之间一般采用减速齿轮传动, 根据齿轮传动的特点, 齿轮传动总存在齿轮间隙、啮合点位置变化以及轮齿磨损不均等因素, 因此小车的运动过程中传动比难免会发生波动。其对运动学模型的影响反映在传动比 i 的变化上。即在运动过程中 i 的实际大小为 $i \pm \Delta i$, 此时小车的运动学模型有如下形式:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{(i \pm \Delta i)r}{2} J_1(\theta, l) \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \frac{ir}{2} J_1(\theta, l) \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} \pm \frac{\Delta i}{2} J_1(\theta, l) \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} \quad (17)$$

其中 $J_1(\theta, l)$ 的含义与上面相同。式 (17) 由两部分构成, 一部分是理论运动学分量, 另一部分为传动比变化所带来的漂移量。因此, 如果只考虑齿轮传动影响的情况下, 小车运动过程将会沿着路径有小的摆动, 如图 7。但是, 在实验过程中发现, 实际情况并非如此: 小车运动中不只是发生摆动, 而且沿某一方向持续偏移, 如

图 8。反复实验后发现, 影响小车运动学模型精度的因素远不止齿轮传动, 还与轮子打滑以及轮子半径不均匀等因素有密切关系。

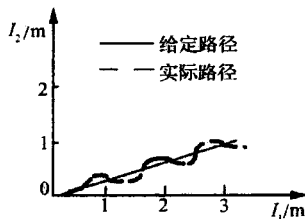


图 7 理论路径

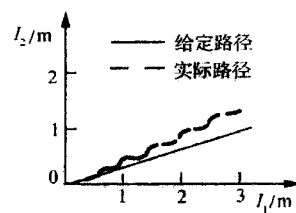


图 8 实际路径

因此, 要提高小车运动精度, 除了采取先进的控制算法外, 还要改善模型机械结构, 提高加工精度, 增大轮子与地面的摩擦系数, 并采用更先进的位置传感器, 使机器人小车的定位不依赖于轮子的转动。

5 结 论

根据刚体运动学及机器人运动学原理, 分析并建立了自行设计的 (2, 0) 型机器人小车的运动学模型, 根据模型的状态参量得出机器人小车运动过程的几点结论。讨论在该模型下几种基本运动形式的实现条件, 重点分析了机器人小车质心实现圆弧运动最小半径的影响因素。最后理论结合实际, 针对小车驱动所采用的齿轮传动特性, 分析齿轮传动对小车运动学模型的影响, 得出提高小车运动精度可采取的措施。

参考文献:

- [1] Guy Campion, Georges Bastin, and Brigitte D Andrea-Novel Structural Properties and Classification of Kinematic and Dynamic Models of Wheeled Mobile Robots [J]. IEEE, Transactions on Robotics and Automation, 1996, 12 (1).
- [2] SM Kilbough, F G pin Design of an Omnidirectional and Holonomic Wheeled Platform Design in Proc[A]. IEEE Conf Robotics and Automation[C], Nice, France, 1992 84 - 90
- [3] Christos Alexopoulos, Paul M Griffin Path Planning for a Mobile Robot [J]. IEEE, Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1992, 22 (2).
- [4] 邓旭, 易建强, 赵冬斌. 一种全方位移动机器人的运动学分析 [J]. 机器人, 2004, 26 (1): 49 - 53
- [5] 王学先, 霍伟. 移动机器人路径跟踪的临时路径方法 [A]. 中国控制与决策学术年会论文集 [C]. 沈阳: 东北大学出版社, 2002

作者简介: 许松清 (1981 -), 男, 福建安溪人, 福州大学机械工程及自动化学院硕士研究生, 研究方向为机器人技术。